

论回旋电子与涡旋电磁波量子:内禀和外部轨道角动量

王哲远,张超*

(清华大学航天航空学院航空宇航电子系统实验室,北京 100084)

摘要: 回旋电子辐射涡旋电磁波量子的理论模型是量子态涡旋电磁波技术的关键. 本文是“论回旋电子与涡旋电磁波量子”的一部分,建立“内禀和外部轨道角动量”相关理论模型. 单个电子或电磁波量子可具有涡旋特征,并且它们由所携带的内禀轨道角动量决定. 为了分析单电子能级跃迁辐射中内禀轨道角动量的传递,本文在自由空间和磁场的不同场景中理论计算了单个电子波包内禀轨道角动量的本征值,表明内禀轨道角动量仅由电子波包自身决定,但是外部轨道角动量受坐标系影响. 内禀轨道角动量中的量子数改变时,应当表现为电子波包的膨胀或紧缩. 本文还给出了电磁波量子在自由空间中的内禀轨道角动量和扭曲光纤中外部轨道角动量表达式,根据是否携带内禀轨道角动量,大量电磁波量子构成量子态轨道角动量电磁波和统计态轨道角动量电磁波.

关键词: 能级跃迁辐射; 涡旋电子; 内禀 OAM; 朗道能级; 相对论效应; 量子态 OAM 电磁波

基金项目: 国家自然科学基金(No.62250070)

中图分类号: TN14

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2025)04-1174-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20240455

The Vortex Electron and Vortex Microwave Photon: The Intrinsic and Extrinsic Orbital Angular Momentum

WANG Zhe-yuan, ZHANG Chao*

(Laboratory of Avionics, School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The theoretical model of cyclotron electron to radiate vortex electromagnetic wave photons is crucial for the technology of quantum state vortex electromagnetic wave. This paper is the part of “The Vortex Electron and Vortex electromagnetic wave Photon”, which establishes the theoretical model related to the “The Intrinsic and Extrinsic Orbital Angular Momentum (OAM)”. Single electron or electromagnetic wave photon can form vortices and are determined by their intrinsic OAM. Aiming to analyze the intrinsic OAM of a single electron transferring in the energy level transition radiation, the eigenvalues of the intrinsic OAM are calculated theoretically in different scenarios of free space and magnetic field in this paper. The results show that the intrinsic OAM is only determined by the electron wave packet, while the extrinsic OAM is affected by the choice of coordinate system. When the quantum number in the intrinsic OAM is changed, the physical variation is the expansion or contraction of the electron wave packet. This paper also gives expressions for the intrinsic OAM of electromagnetic wave photons in free space and the extrinsic OAM in twisted optical fiber. Depending on the presence of the intrinsic OAM, a mass of electromagnetic wave photons can constitute a quantum state OAM electromagnetic wave and a statistical state OAM electromagnetic wave.

Key words: energy level transition radiation; vortex electron; intrinsic OAM; Landau levels; relativity; quantum OAM electromagnetic waves

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62250070)

1 引言

电子束^[1,2]或光束^[3]可以通过特定相位变换结构,形成等相位面为螺旋面的涡旋粒子束,这样的涡旋束在整个相位面上具有 $e^{j\ell\phi}$ 的螺旋相位因子和 \hbar 轨道角动量(Orbital Angular Momentum, OAM),被称为涡旋电子束^[1,2,4]或涡旋光束^[3]. 其中, ℓ 被称为拓扑荷,通常可认为是周期相位变化次数或OAM模态值, ϕ 是方位角, \hbar 表示约化普朗克常数. 根据量子电动力学(Quantum Electro-Dynamics, QED)理论,单电磁波量子或电子的波函数同样有螺旋相位因子 $e^{j\ell\phi}$,其OAM具有明确定义的 \hbar 模态值,这类量子称为涡旋电子或涡旋电磁波量子^[5,6]. 然而,近几年关于单个光子存在另一种讨论,实际中的光子不能直接以波函数的形式体现. 其一,波函数所表征的波列具有无限能量,这和单光子具有的确定的能量 $\hbar\omega$ 相违背,而把单光子描述成脉冲信号将不存在冲突;其二,波函数无法体现能量与时间的不确定关系 $\Delta E \cdot \Delta t \sim 1/2 \hbar$,而脉冲信号的频率分布 $\Delta\omega$ 却正好体现这一不确定性^[7]. 因此,用满足频率不确定性分布的“波包”描述实际中的单个光子更为准确,此时单个波包的能量为确定的 $\hbar\omega$,这里的 ω 可以看作是“平均频率”或“主频率”,与实际测量值相同,这个结论对于单个电子也是如此^[8]. 本文中描述的量子特性指的是波束中单个量子波包所具有的特性,但由于波包具有的平均性质,在计算中单个波包的OAM与单量子OAM的本征值应当相同.

波束的统计形式可由单量子 and 波束的不同自旋体现,例如,单光子是玻色子,其必须具有自旋模态值 ± 1 ,然而平面电磁波束自旋模态值却可以为0,这就是大量光量子的统计结果. 单量子 and 波束的OAM同样可以由此区分:单个量子直接携带的OAM是量子本质的属性,称之为内禀OAM,数学表达式为 $\langle L^{\text{int}} \rangle = \hbar \langle \mathbf{p} \rangle / p$ ^[1,2,5], $\langle \mathbf{p} \rangle$ 表示动量算符的平均值;而通过大量量子以统计形式构成的OAM波束,称之为统计态OAM电磁波或电子束,这种波束的OAM由相位变换结构产生,不同的OAM波束本质上可看作是大量量子的初相位和在空间位置排布不同,在物理形式上这种OAM与波束坐标轴选择有关,称为外部OAM. 外部OAM与内禀OAM在数学表达式上也不相同, $\langle L^{\text{ext}} \rangle = \langle \mathbf{r} \rangle \times \langle \mathbf{p} \rangle$, $\langle \mathbf{r} \rangle$ 表示位置算符的平均值^[1,2,5]. 有文献利用经典天体运动,形象地对内禀OAM与外部OAM做出区分^[9]. 将地月系比作电子波包或电磁波量子波包,则地球自转描述了波包的自旋角动量,月球围绕地球的运动可描述其内禀OAM,而整个地月系统绕太阳的公转描述了外部OAM. 还有文献直接指出携带内禀OAM的量子态OAM电磁波能体现OAM无线传输新维度,被认为具有突破传统多天线

MIMO信道容量界的潜能^[1,2,10,11],在未来通信场景或高分辨率粒子成像等领域都极具应用前景.

2002年,O'neil等人^[12]首次通过实验清晰展示了电子具有的一种除自旋外的内禀属性,该属性可以使 $1 \mu\text{m}$ 直径方解石产生围绕自身中心的回旋运动. 除此之外,还有一种属性与方解石沿某轨道运动有关. O'neil将这两种属性定义为内禀IOAM(Intrinsic OAM)和外部EOAM(Extrinsic OAM). 2007年,Bliokh等人^[13]指出总角动量应是外部OAM、内禀OAM与自旋角动量之和,其中外部OAM与波包中心的运动有关,内禀OAM代表波包本身具有的轨道角动量^[14]. 还有一部分学者研究了量子态OAM电子束的模态识别和检测^[15,16],并对携带不同OAM的涡旋电子进行分离^[17]. 2022年,文献[1]提出一种间接检测微波量子内禀OAM的方法. 具体来说,根据相对论电子与微波量子相互作用时存在OAM交换的特性,设计了涡旋电子的衍射分选装置. 在检测端,涡旋电子的不同衍射图案即可表明接收到了不同内禀OAM的微波量子.

为了揭示单个涡旋电子通过能级跃迁辐射OAM电磁波量子的机理,共分为“涡旋电子波包”^[18]“涡旋电磁波量子辐射”^[19]和“内禀和外部轨道角动量”三个部分进行详细推导和说明. 本文是系列论文的最后一篇,将理论推导电子内禀OAM的力学量本征值和外部OAM的表达式,这将使涡旋电子的能级跃迁辐射过程和其中能量变化更为清晰. 另外,本文还将给出电磁波量子具有的两种属性OAM,并具体描述量子态OAM电磁波和统计态OAM电磁波的区别.

2 回旋电子的轨道角动量本征值

为了得到磁场中电子轨道角动量的实际值,应当对其力学量算符做出测量^[20,21],测量后的结果即为轨道角动量算符的本征值. 换言之,轨道角动量的本征值能够完全描写给定状态下力学量算符的测量结果^[22]. 轨道角动量根据其是否与坐标轴选择有关而分为内禀OAM和外部OAM,下面将对二者的本征值做出具体求解.

2.1 自由空间中的电子波包内禀OAM

在无势场中,电子的运动由电子波包的传播描述,且运动中心应当为电子波包的中心. 此时电子的OAM分成两部分,一部分相对坐标原点(外部OAM),一部分相对波包中心(内禀OAM). 为了便于分析波包携带的内禀OAM,假设电子波包的传播方向沿 z 轴波包中心,以建立坐标系 xyz (这里的坐标 z 轴仅表示波包的前进方向, xyz 可以是波包中心为原点的任意坐标系). 内禀OAM由其波包半径决定,在任意坐标中OAM方向一直

沿传播方向. 考虑自然单位制 $c = \hbar = 1$, 根据轨道角动量计算公式^[20]:

$$\hat{L} = \hat{\rho} \times \hat{P} \quad (1)$$

其中, $\hat{\rho}$ 表示电子的波包半径, \hat{P} 为电子波包的正则动量算符, 且 $\hat{P} = -i\nabla$, 可得: $\hat{L}_z^i = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$. 在柱坐标系下, 内禀 OAM 算符可以写为 $\hat{L}_z^i = -i\partial_\phi$, 其力学量本征值可以通过下式求解:

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = \langle -i\partial_\phi \rangle = \frac{\langle \psi^\dagger | -i\partial_\phi | \psi \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} \quad (2)$$

其中, ψ 表示电子波函数, ψ^\dagger 表示波函数共轭. 式(2)中的分子积分式存在 ∂_ϕ 项, 仅与自由空间的电子波函数中的方位角项有关, 即 $\psi \propto \psi_0 e^{im\phi}$. 因此在求解式(2)时可先求解 ∂_ϕ 微分, 得到与积分独立的一项, 再对上下积分式进行化简:

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = \langle -i\partial_\phi \rangle = \frac{-i \cdot im \langle \psi^\dagger | \psi \rangle}{\langle \psi^\dagger | \psi \rangle} = m \quad (3)$$

积分式(3)的分子和分母将系数相约后, 得到自由空间内禀轨道角动量的本征值:

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (4)$$

2.2 磁场中的电子波包内禀 OAM

对于磁场中运动的电子束, 还应考虑其外场势 A , 给定电子回旋运动的物理模型, 如图 1 所示. 考虑最简单的情况, 波束中的单个电子波包回旋运动处于磁场中任意原点 O 建立的坐标系 XYZ 下, 回旋半径为波包中心距传播轴的垂直距离 R . 同时, 电子波包还处于自身波包中心的坐标系 xyz 中, 该坐标系将随着波包的运动而发生变化, 波包的半径设为 ρ . 假设电子波包的电荷量为 e , 质量为 μ , 处于恒定磁场 \vec{B}_z 中, 考虑光速和普朗克常量满足自然单位制 $c = \hbar = 1$. 电子波包的内禀 OAM 应对应于自身坐标系 xyz , 而外部 OAM 与回旋运动坐标系 XYZ 有关. 在求解“涡旋电子波包”^[18]时已经证明, 处于外势场中电子的守恒量会发生变化, 变化量在正则动量中表现为额外冲量 eA , 这将导致波包中发

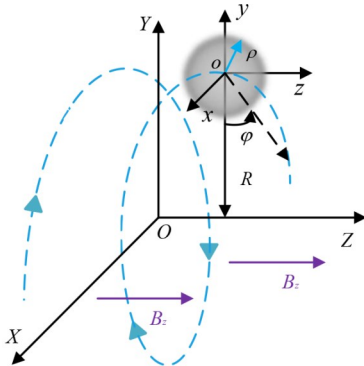


图 1 磁场中的电子波包

生能级的分立和波包膨胀, 并使内禀 OAM 发生变化. 以下考虑坐标系 xyz , 对磁场中波包的内禀 OAM 进行计算.

根据轨道角动量计算式(1), 代入含正则动量的表达式 $\hat{P} - |e|A$, 有

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{\rho} \times (\hat{P} - |e|A) \\ &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \hat{P}_x + \frac{|e|B}{2}y & \hat{P}_y - \frac{|e|B}{2}x & \hat{P}_z \end{bmatrix} \\ &= -i\partial_\phi + \frac{|e|B}{2}\rho^2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中, B 为磁感应强度, $\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$ 为动量算符. 式(5)中的轨道角动量算符可分为两部分, 一部分仅与电子波函数螺旋相位因子 $e^{im\phi}$ 有关, 另一部分与波包半径 ρ 有关, 可分别进行本征值求解, 假设 $\frac{|e|B}{2}\rho^2 = r^2$, 有

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = \langle -i\partial_\phi \rangle + \langle r^2 \rangle = \frac{\int \psi^\dagger (-i\partial_\phi) \psi}{\int \psi^\dagger \psi} + \frac{\int \psi^\dagger r^2 \psi}{\int \psi^\dagger \psi} \quad (6)$$

其中, 分母项积分式可以利用波函数直接求解, 并且对于不同的自旋情况具有相同的结果:

$$\langle \psi_+^\dagger | \psi_+ \rangle = \langle \psi_-^\dagger | \psi_- \rangle \quad (7)$$

式(5)中的第一项与 2.1 节中求解方法相同, 可以直接得到其结果, $\langle -i\partial_\phi \rangle = m$, 只需对第二项做具体求解. 根据相对论电子波函数^[18], 有

$$\begin{aligned} \psi_+ &= R(\rho) e^{im\phi} e^{ik_z z} e^{-iEt} \cdot u_\mu \\ &= e^{im\phi} e^{ik_z z} e^{-iEt} e^{-r^2/2} \begin{bmatrix} r^{|m|} L_{n_p}^{|m|}(r^2) \\ 0 \\ k_z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + i\sqrt{2} e^{i\phi} r^{|m|+1} L_{n_p}^{|m|+1}(r^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{B|e|} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi_- &= R(\rho) e^{im\phi} e^{ik_z z} e^{-iEt} \cdot u_\mu \\ &= e^{im\phi} e^{ik_z z} e^{-iEt} e^{-r^2/2} \begin{bmatrix} r^{|m|} L_{n_p}^{|m|}(r^2) \\ E + \mu \\ 0 \\ -k_z \end{bmatrix} \\ &\quad + i\sqrt{2} e^{-i\phi} r^{|m|+1} L_{n_p}^{|m|+1}(r^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{B|e|} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, ψ_+ 和 ψ_- 分别对应自旋本征值为 $s = +1/2$ 和 $s =$

-1/2 的情况, E 为“涡旋电子波包”^[18]部分已经求解的朗道能级, k_z 表示电子轴向波数, $L_{n_\rho}^{|m|}$ 为拉盖尔高斯多项式. 代入式(7)中, 首先得到分母项积分式:

$$\int \psi^\dagger \psi = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[((E+\mu)^2 + (k_z)^2) r^{2|m|} \left(L_{n_\rho}^{|m|}(r^2) \right)^2 e^{-r^2} \right] dr d\varphi$$

$$= \pi ((E+\mu)^2 + (k_z)^2) \frac{(m+n_\rho)!}{n_\rho!}$$
(10)

其中, m 和 n_ρ 分别为电子波包的角量子数和主量子数. 为方便后续求解, 在这里做变量代换 $r^2 = \tilde{r}$, 同时将电子波函数代入式(6)的第二项, 得到化简后的积分式:

$$\int \psi_+^\dagger \tilde{r} \psi_+ = \pi \int_0^\infty \left[((E+\mu)^2 + (k_z)^2) \tilde{r}^{|m|+1} L_{n_\rho}^{|m|}(\tilde{r}) e^{-\tilde{r}} + 2B|e| r^{|m|+2} L_{n_\rho}^{|m|+2}(\tilde{r}) e^{-\tilde{r}} \right] d\tilde{r}$$
(11)

$$\int \psi_-^\dagger \tilde{r} \psi_- = \pi \int_0^\infty \left[((E+\mu)^2 + (k_z)^2) \tilde{r}^{|m|+1} L_{n_\rho}^{|m|}(\tilde{r}) e^{-\tilde{r}} + 2B|e| r^{|m|+2} L_{n_\rho-1}^{|m|+2}(\tilde{r}) e^{-\tilde{r}} \right] d\tilde{r}$$
(12)

利用拉盖尔高斯多项式满足的关系^[23], $L_{n_\rho}^{|m|}(\tilde{r}) = L_{n_\rho}^{|m|}(\tilde{r}) - L_{n_\rho-1}^{|m|}(\tilde{r})$, 对上式进行递推, 并根据其正交关系 $\int_0^\infty L_{n_\rho}^{|m|}(\tilde{r}) L_{n_\rho'}^{|m|}(\tilde{r}) e^{-\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{(m+n_\rho)!}{n_\rho!} \delta_{n_\rho, n_\rho'}$ 化简, 其中, $\delta_{n_\rho, n_\rho'}$ 为狄拉克算子, 当且仅当 $n_\rho = n_\rho'$ 时该算子值为 1, 得到:

$$\int \psi_+^\dagger r^2 \psi_+ = \pi \frac{(m+n_\rho)!}{n_\rho!} \left[((E+\mu)^2 + (k_z)^2) (2n_\rho + m + 1) + 2B|e| (n_\rho + m + 1)(2n_\rho + m + 2) \right]$$
(13)

$$\int \psi_-^\dagger r^2 \psi_- = \pi \frac{(m+n_\rho)!}{n_\rho!} \left[((E+\mu)^2 + (k_z)^2) (2n_\rho + m + 1) + 2B|e| n_\rho (2n_\rho + m) \right]$$
(14)

将式(13)、式(14)和 $\langle -i\partial_\phi \rangle = m$ 共同代入式(6), 考虑不同自旋取值对应的情况, 得到内禀 OAM 在相对论电子波函数下的本征值为

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = 2n_\rho + m + |m| + 1 + \frac{(B|e|(2n_\rho + m + |m| + 1))^2 + (B|e| \cdot 2s)^2}{E(E+\mu)} \Big|_{s=\frac{1}{2}}$$
(15)

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = 2n_\rho + m + |m| + 1 - \frac{(B|e|(2n_\rho + m + |m| + 1))^2 + (B|e| \cdot 2s)^2}{E(E+\mu)} \Big|_{s=-\frac{1}{2}}$$
(16)

式(15)和式(16)分别对应不同自旋取值 $s=+1/2$ 和 $s=-1/2$ 的情况, 注意到, 两式最后一项相对于前几项属于高阶无穷小项, 可以忽略不计, 因此内禀 OAM 的简化本征值为

$$\langle \hat{L}_z^i \rangle = 2n_\rho + m + |m| + 1$$
(17)

电子波包在自由空间和磁场的不同场景中, 其内禀 OAM 对应着不同取值, 这主要是磁场中电子具有的额外冲量 $|e|A$ 造成的. 电子回旋运动会伴随能级跃迁并发生电磁波量子的辐射, 这个过程中涡旋电子的量子数将发生改变, 内禀 OAM 本征值与量子数 m 和 n_ρ 有关, 也将随之发生变化.

2.3 电子波包的外部 OAM

当电子束做回旋运动时, 其内部的单个电子波包也处于任意坐标系 XYZ 中, 可以假设其以波束中心为圆心, R 为半径做回旋运动. 这样的回旋运动主要在横向, 可考虑忽略其轴向的运动分量, 设坐标系原点为整个平面的任意一点, 如图 2 所示, 这样的回旋运动使电子波包具有外部的 OAM, 并且与其回旋运动所处的坐标系 XYZ 有关.

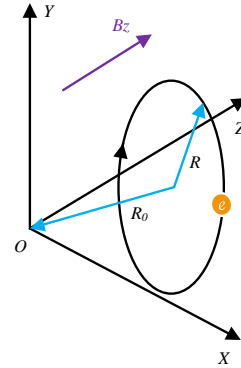


图 2 任意坐标系中的回旋电子

在任意坐标系 XYZ 中, 波包中心距离回旋中心半径为 R , 回旋中心与所设任意坐标系原点的距离为 R_0 , 电子回旋频率为 ω_c , 由于电子电荷 $e < 0$, $\omega_c = -|e|B/\mu$, 这里的正负仅表示对于正电荷而言的顺时针或逆时针旋转, 电子横向速度 v , 其运动可由时间 t 表示为

$$X(t) = X_0 + R \cos \omega_c t$$
(18)

$$Y(t) = Y_0 + R \sin \omega_c t$$
(19)

机械动量 $\vec{p} = \mu \vec{v}$ 可由上式表示为

$$\mu \dot{X}(t) = -|e|BR \sin \omega_c t$$
(20)

$$\mu \dot{Y}(t) = |e|BR \cos \omega_c t$$
(21)

在洛伦兹规范下, 磁场中的正则动量可以表示为

$$P_x(t) = \mu \dot{X}(t) + |e|A_x(t)$$

$$= -\frac{1}{2}|e|BY_0 + \frac{1}{2}|e|BR \sin \omega_c t$$
(22)

$$\begin{aligned} P_y(t) &= \mu \dot{Y}(t) + |e| A_y(t) \\ &= \frac{1}{2} |e| B X_0 - \frac{1}{2} |e| B R \cos \omega_c t \end{aligned} \quad (23)$$

因此,外部 OAM 可由正则角动量 Z 向分量表示,并代入式(23)化简可得:

$$L_z = X P_y - Y P_x = \frac{1}{2} |e| B (R_0^2 - R^2) \quad (24)$$

式(20)和式(21)可看出机械动量不受坐标系影响,仅与回旋半径和磁场有关. 正则动量 $P_x(t)$ 和 $P_y(t)$ 尽管是磁场中的守恒量,却随着原点的远离而越来越大. 这直接导致外部 OAM 与坐标系选择有关,甚至当 R_0 远大于回旋半径 R 时完全决定外部 OAM.

2.4 内禀 OAM 和外部 OAM 对比

量子数将影响波函数的分布,主量子数 n_ρ 和角量子数 m 的改变具体表现为电子波函数的概率分布向外扩散或向内收缩,这其实意味着内禀 OAM 的增大或变小实际表征为整个电子的膨胀或紧缩,如图 3 所示,与所选择观察坐标系无关而仅由其波包本身决定. 而外部 OAM 与坐标系选择有关,通过式(24)可以看出,不同坐标系将主要影响到坐标系原点的距离 R_0 ,外部 OAM 的值也会随之改变. 此外,外部 OAM 还与电子回旋运动有关,回旋半径的不同大小也会造成外部 OAM 的改变.

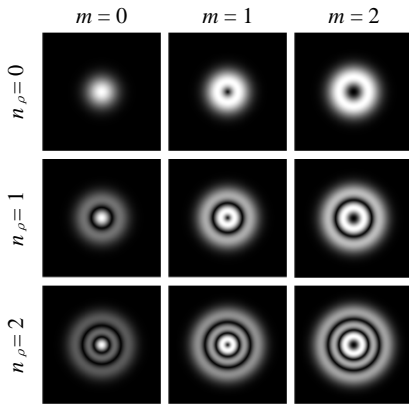


图3 不同量子数对应的电子波函数分布

3 朗道能级与内禀 OAM

根据赛曼效应^[24,25],电子的轨道磁矩和外磁场相互作用产生相互作用能,电子波包的内禀 OAM 本征值恰好构成轨道磁矩的一部分,可以利用赛曼效应得到电子轨道角动量和朗道能级的联系. 电子的轨道磁矩和自旋磁矩可以表示为

$$M_L = -\frac{e\langle L \rangle}{2m_e}, M_S = -\frac{e\langle S \rangle}{2m_e} \quad (25)$$

其与外磁场的相互作用能计算为磁矩和外磁场的积,即

$$\begin{aligned} E_L + E_S &= -B \cdot (M_L + M_S) \\ &= \frac{eB}{2m_e} (\langle L \rangle + 2\langle S \rangle) \end{aligned} \quad (26)$$

在“涡旋电子波包”部分,为求解径向波函数做过如下假设^[18]:

$$\varepsilon = \frac{(E^2 - \mu^2)}{2\mu} \sim \frac{eB}{2\mu} (\langle L \rangle + 2\langle S \rangle) \quad (27)$$

因此,在相对论情况下朗道能级与角动量本征值对应关系如下:

$$\varepsilon = E^2 \sim eB (\langle L \rangle + 2\langle S \rangle) \quad (28)$$

根据 2.2 节中求解的磁场中内禀 OAM 本征值,代入式(28)可以得到:

$$B |e| (2n_\rho + m + |m| + 2s + 1) \quad (29)$$

而朗道能级为

$$E = \sqrt{k^2 + \mu^2 + B |e| (2n_\rho + m + |m| + 2s + 1)} \quad (30)$$

这表明电子波包内禀 OAM 和自旋完全贡献了朗道能级的最后一项,也表明在物理上朗道能级之所以会产生一系列分立能量是由于外矢量势中磁矩与磁场的相互作用.

4 电磁波量子的 OAM

电磁波由大量的电磁波量子^[6](electromagnetic wave photons)组成,通常在均匀介质中沿直线传播,其运动可看作和电子波包在自由空间一致,沿其波包中心做直线运动,并且仅携带内禀 OAM. 只有当电磁波量子在光纤等特殊光学器件中运动时^[26],才能携带外部 OAM. 此时的电磁波量子波包整体可看作沿光纤等光学器件做回旋运动,其外部 OAM 显然与测量轴的选择有关.

4.1 电磁波量子的内禀 OAM 和外部 OAM

电磁波量子在均匀介质或真空中均做直线运动,类似于 2.1 节所述电子波包的运动,为便于分析其内禀 OAM,本节仅考虑最简单的自由空间情况. OAM 表征电磁波空间场分布和螺旋波前的形成,对于自由空间传输的电磁波量子,一般通过其贝塞尔形式或拉盖尔-高斯形式分析其内禀 OAM^[3]. 但无论哪种形式,其轨道角动量算符 $\hat{L}_z^i = -i\partial_\phi$ 都与波函数 $\psi \propto e^{im\phi}$ 满足关系:

$$\hat{L}_z^i \psi = l\psi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (31)$$

电磁波量子具有量子化后的内禀 OAM 本征值 $\langle \hat{L}_z^i \rangle = l, l$ 取值满足式(31),计算得到的内禀 OAM 具有与坐标轴选择无关的属性,虽然玻色子与费米子物理本质不同,但涡旋电磁波量子的计算结果与自由空间中电子波包的内禀 OAM 属性一致.

对于光纤等光学器件中的电磁波量子,考虑一种最简单的光学波导,电磁波量子可以在光学波导壁上

全反射. 所满足的运动场景如图 4 所示, 电磁波量子的外部 OAM 表示为 $L_z^e = \vec{R} \times \vec{p}$, 其中 \vec{R} 为电磁波量子距离旋转中心的垂直距离, \vec{p} 为沿传播方向的线动量, $\vec{p} = \vec{e}_z / \lambda \sin \theta$. 外部 OAM 求解和 2.3 节给出的求解方法类似, 本节不再赘述. 同样, 对于电磁波量子, 其外部 OAM 也和分析光学运动所选的坐标系有关.

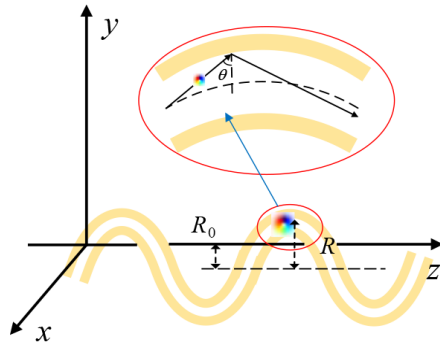


图 4 光纤中传播的电磁波量子

4.2 量子态 OAM 电磁波和统计态 OAM 电磁波

单个电磁波量子可以携带螺旋相位因子 $e^{i\varphi}$, 并具有明确定义的内禀轨道角动量. 携带有相同内禀 OAM 模式值的大量电磁波量子可以以统计排布的形式构成电磁波束, 如图 5 所示, 称为量子态 OAM 电磁波^[1,2,10]. 这样的电磁波量子不能采用传统阵列天线产生, 可以利用电子回旋辐射的专用制备装置直接产生. 由于产生的每个电磁波量子都携带有内禀 OAM, 构成的电磁波束本质上反映了新的承载信息方式, 能大幅提高传输信道容量^[2,9,10].

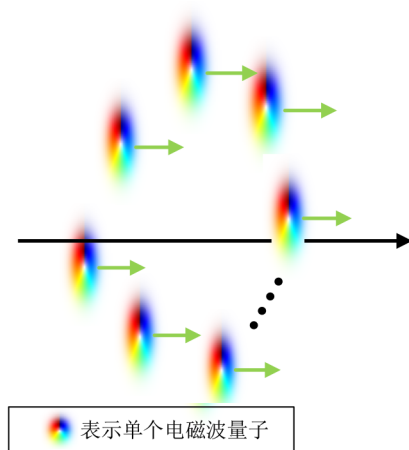


图 5 量子态 OAM 电磁波示意图

另外, 大量量子可以通过螺旋相位板、衍射光栅^[1,4,5]等相位变换结构改变整个波束的相位结构, 形成整个相位面为螺旋面的涡旋波束, 如图 6 所示. 然而这样的形成方式不会改变单个电磁波量子的相位结

构, 仅能使波束中的每个电磁波量子在排布时量子之间产生相差, 造成波束的整个相位面看起来为螺旋面. 这样的波束具有的 OAM 是外部 OAM, 此类电磁波称为统计态 OAM 电磁波^[2,10].

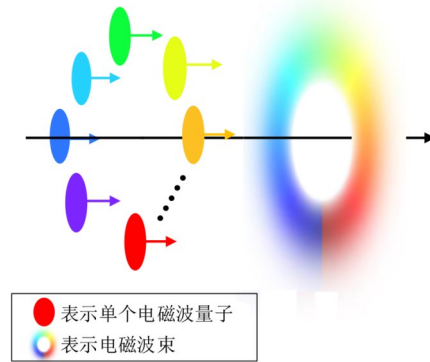


图 6 统计态 OAM 电磁波示意图

5 内禀 OAM 的传递

电磁波与电子可以直接进行能量交换, 这种换能可以通过一些电真空器件实现, 例如回旋器件^[27]或行波管器件^[28], 他们具有完备的电子与电磁波的相互作用结构, 在其中可直接进行换能并伴随着内禀 OAM 的传递. 另外, 电子回旋运动过程中可以直接通过能级跃迁辐射电磁波量子, 这种辐射方式同样包含内禀 OAM 的转移, 并可以利用一些振荡器件实现.

由于自旋属于粒子最基本属性, 整个换能过程电子和电磁波量子仅能进行内禀 OAM 的交换. 考虑电子向电磁波转移能量的场景, 根据角动量守恒, 当单电子损失 OAM 模式数为 $\Delta m = 1$ 时, 单个电磁波量子由于仅能增加自旋角动量数 1, 无法获得 OAM, 只有当 $\Delta m > 1$ 时, 换能后电磁波量子才能具有 OAM.

6 总结与讨论

为了揭示单个涡旋电子通过能级跃迁辐射 OAM 电磁波量子的机理, 共分为“涡旋电子波包”“涡旋电磁波量子辐射”和“内禀和外部轨道角动量”三个部分对相关理论模型进行了详细描述与理论推导. 在“涡旋电子波包”部分中主要推导了相对论电子波包的数学模型, 包括相对论电子波函数与其朗道能级, 并通过求解狄拉克方程解释了 SAM 和 OAM 在本质上不可分割的情况^[18]. 根据这些模型在“涡旋电磁波量子辐射”中推导了电子能级跃迁的整个辐射模型, 电子回旋运动过程中, 将在朗道能级上发生自然的能级跃迁, 当向低能级跃迁时, 其内禀 OAM 减小, 波包紧缩, 并辐射出单个 OAM 电磁波量子^[19]. 这种量子态 OAM 电磁波可以通过电子回旋脉塞产生, 并可用一种嵌入虹膜的圆波导滤

波结构进行频率筛选,根据需要选出特定 OAM 模态电磁波量子。

然而电磁波量子的横向尺度应是有限的,并且与单个电子波的振动场有关。由此,单个量子的 OAM 和波束的 OAM 也应该加以区分。本文主要对量子具有的不同 OAM 进行求解,单个量子波包本身具有的轨道角动量为内禀 OAM,而在某些场景中做绕轴运动时具有外部 OAM。本文理论推导了对于自由空间和磁场的不同场景下,电子内禀 OAM 的本征值,还给出在磁场中运动单电子的外部 OAM 表达式。内禀 OAM 在物理上应当表示为波包的膨胀或紧缩,而外部的 OAM 受坐标系影响,根据表达式(24),不同坐标系中,由于与原点的距离不同,外部 OAM 表达式有所不同,外部 OAM 与电子的宏观运动有关。根据相同原理,本文还计算了自由空间和波导等光学器件中电磁波量子的内禀 OAM 和外部 OAM,结论与电子一致,内禀 OAM 组成其波包,而其外部 OAM 与分析光学器件所选择的坐标系有关,根据单个电磁波量子是否携带 OAM 和空间排布的方式,大量量子可以构成统计态 OAM 电磁波和量子态 OAM 电磁波。本文还由赛曼效应得到朗道能级中内禀 OAM 所贡献的能量项,这表明磁场中电子波包的分立能量是由内禀 OAM 与外磁场的相互作用所造成。

至此,电子能级跃迁辐射 OAM 电磁波量子的整个理论模型已经完全给出,“论回旋电子与涡旋电磁波量子”内容中所推导的理论模型能给未来通信或粒子成像等领域提供新思路,奠定相应理论基础。对于量子态涡旋电磁波传输技术具有设计和工程指导意义。

参考文献

- [1] ZHANG C, JIANG X F, WANG Z Y, et al. Orbital angular momentum detection device for vortex microwave photons[J]. *Communications Engineering*, 2023, 2: 11.
- [2] 张超, 王元赫. 涡旋电磁波轨道角动量传输的量子电动力学分析[J]. *中国科学: 信息科学*, 2023, 53(3): 566-584. ZHANG C, WANG Y H. Quantum electro-dynamics analysis of vortex electro-magnetic wave transmission with orbital angular momentum[J]. *Scientia Sinica (Informationis)*, 2023, 53(3): 566-584. (in Chinese)
- [3] DENNIS M R, O'HOLLERAN K, PADGETT M J. Chapter 5 singular optics: Optical vortices and polarization singularities[J]. *Progress in Optics*, 2009, 53: 293-363.
- [4] VERBEECK J, TIAN H, SCHATTSCHNEIDER P. Production and application of electron vortex beams[J]. *Nature*, 2010, 467(7313): 301-304.
- [5] BLIOKH K Y, IVANOV I P, GUZZINATI G, et al. Theory and applications of free-electron vortex states[J]. *Physics Reports*, 2017, 690: 1-70.
- [6] 任之恭. 微波量子物理学[M]. 北京: 科学出版社, 1980. REN Z G. *Microwave Quantum Physics*[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese)
- [7] DROZDOV I V, STAHLHOFEN A A. How long is a photon? [EB/OL]. (2008-03-18) [2024-05-16]. <https://arxiv.org/abs/0803.2596v1>.
- [8] QIN Z Z, PRASAD A S, BRANNAN T, et al. Complete temporal characterization of a single photon[J]. *Light: Science & Applications*, 2015(1): 337-342.
- [9] 谢翔东, 何耀宇, 张超. 涡旋电磁波轨道角动量传输技术[J]. *邮电设计技术*, 2021(12): 6-13. XIE X D, HE Y Y, ZHANG C. Vortex electromagnetic waves transmission with orbital angular momentum[J]. *Designing Techniques of Posts and Telecommunications*, 2021(12): 6-13. (in Chinese)
- [10] 张超, 王元赫. 论涡旋电磁波轨道角动量传输新维度[J]. *通信学报*, 2022, 43(6): 211-222. ZHANG C, WANG Y H. New dimension in vortex electro-magnetic wave transmission with orbital angular momentum[J]. *Journal on Communications*, 2022, 43(6): 211-222. (in Chinese)
- [11] IMT-2030(6G)推进组. 6G 总体愿景与潜在关键技术[R]. 北京: IMT-2030(6G)推进组, 2021.
- [12] O'NEIL A T, MACVICAR I, ALLEN L, et al. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(5): 053601.
- [13] BLIOKH K Y. Geometrical optics of beams with vortices: Berry phase and orbital angular momentum Hall effect[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 97(4): 043901.
- [14] BLIOKH K Y, BLIOKH Y P, SAVEL'EV S, et al. Semi-classical dynamics of electron wave packet states with phase vortices[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(19): 190404.
- [15] GRILLO V, TAVABI A H, VENTURI F, et al. Measuring the orbital angular momentum spectrum of an electron beam[J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 15536.
- [16] ZHANG C, XU P F, JIANG X F. Detecting superposed orbital angular momentum states in the magnetic field by the crystal diffraction[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2021, 136(1): 60.
- [17] SILENKO A J, ZHANG P M, ZOU L P. Manipulating twisted electron beams[J]. *Physical Review Letters*, 2017,

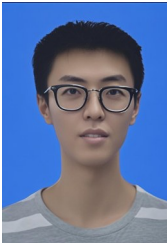
119(24): 243903.

- [18] 王哲远, 张超. 论回旋电子与涡旋电磁波量子: 涡旋电子波包[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 414-420.
WANG Z Y, ZHANG C. The vortex electron and radiated vortex photon of electromagnetic wave: Vortex electron wave packet[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(2): 414-420. (in Chinese)
- [19] 王哲远, 张超. 论回旋电子与涡旋电磁波量子: 涡旋电磁波量子辐射[J]. 电子学报, 2024, 52(5): 1460-1468.
WANG Z Y, ZHANG C. The vortex electron and radiated vortex photon of electromagnetic wave: Vortex microwave photon radiation[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(5): 1460-1468. (in Chinese)
- [20] LANDAU L, LIFSHITZ E, SYKES J, et al. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1991.
- [21] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.
ZHOU Y B. Course of Theoretical Mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2009. (in Chinese)
- [22] 阿希叶泽尔 А И, 别列斯捷茨基 В Б. 量子电动力学[M]. 于敏, 译. 北京: 科学出版社, 1964.
- [23] BAYIN S. Laguerre Polynomials[M]. Hoboken: John

Wiley & Sons, 2018.

- [24] LARMOR J, RS F, COLLEGE F. IX. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium.: Part III. relations with material media[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 1897, 190: 205-300.
- [25] COHEN-TANNOUJDI C, DUPONT-ROC J, GRYNBERG G. Introduction to Quantum Electrodynamics[M]. New York: Wiley, 1989.
- [26] HARRIS J, GRILLO V, MAFAKHERI E, et al. Structured quantum waves[J]. Nature Physics, 2015, 11(8): 629-634.
- [27] 马春燕, 袁学松, 韩煜, 等. 0.6THz 三次谐波回旋管的研究[J]. 电子学报, 2012, 40(3): 495-499.
MA C Y, YUAN X S, HAN Y, et al. Study of a 3rd-harmonic 0.6 THz gyrotron[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3): 495-499. (in Chinese)
- [28] 廖复疆. 大功率微波真空电子学技术进展[J]. 电子学报, 2006, 34(3): 513-516.
LIAO F J. Technical advance of the vacuum microwave electronics[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(3): 513-516. (in Chinese)

作者简介



王哲远 男, 1995 年生, 山西临汾人. 清华大学航天航空学院博士研究生. 研究方向为电磁波轨道角动量传输与探测、涡旋微波量子.
E-mail: wangzhey21@mails.tsinghua.edu.cn



张超 男, 1978 年生, 陕西城固人. 清华大学航天航空学院教授、博士生导师. 2005 年获清华大学工学博士学位, 2006 年获日本国家信息学研究所(NII)信息学博士学位. IET 会士(IET Fellow)、IEEE 高级会员、IEICE 高级会员. 主要研究方向为涡旋电磁波轨道角动量传输与探测、涡旋微波量子、航空宇航电子系统.
E-mail: zhangchao@tsinghua.edu.cn